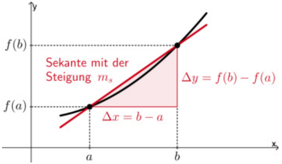
Differentialrechnung

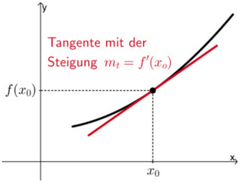
Differenzenquotient

- $m_S = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$
- **Steigung einer Sekante** durch zwei Graphenpunkte $(a|f(a))$ **und** $(b|f(b))$
- **Mittlere Änderungsrate** einer Funktion im Intervall $[a;b]$



Differentialquotient

- $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- **Formale Definition der Ableitung** einer Funktion
- **Steigung derTangente** an den Graphen einer Funktion an einer Stelle x_0
- **Steigung des Graphen** einer Funktion an einer Stelle x_0
- **Lokale Änderungrate** einer Funktion an einer Stelle x_0
- Im Sachzusammenhang: **Momentane Änderungsrate** einer Größe zu einem Zeitpunkt *t*



Ableitungen / Ableitungsregeln

	Term der Funktion	Term der Ableitungsfunktion
Konstante Funktion	c	0
Potenzfunktion	x^r	$r \cdot x^{r-1}$
Wurzelfunktion	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
Sinusfunktion	$\sin x$	$\cos x$
Kosinusfunktion	$\cos x$	$-\sin x$
Natürliche Exponentialfunktion	e^x	e^x
Exponentialfunktion	a^x	$a^x \cdot \ln a$
Natürliche Logarithmusfunktion	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
Logarithmusfunktion	$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$

	Term der Funktion	Term der Ableitungsfunktion
Summenregel	$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
Faktorregel	$k \cdot u(x)$	$k \cdot u'(x)$
Produktregel	$u(x) \cdot v(x)$	$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
Quotientenregel	$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$
Kettenregel	$u(v(x))$	$u'(v(x)) \cdot v'(x)$

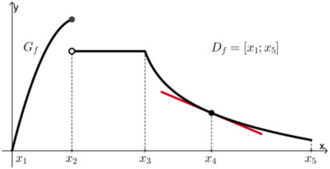
Differenzierbarkeit

Differenzierbar, wenn der Differentialquotient existiert, d. h. wenn der links- und der rechtsseitige Grenzwert übereinstimmen.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Nicht differenzierbar an einer „Knick"- oder Sprungstelle

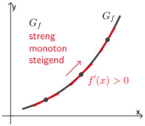
Nicht differenzierbar an den eingeschlossenen Rändern eines Definitionsbereichs

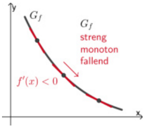


- Nicht differenzierbar am linken Definitionsrand $x = x_1$
- Nicht differenzierbar an der Sprungstelle $x = x_2$
- Nicht differenzierbar an der „Knickstelle" $x = x_3$
- Differenzierbar an der Stelle $x = x_4$
- Nicht differenzierbar am rechten Definitionsrand $x = x_5$

Monotonieverhalten

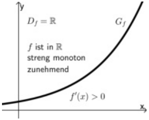
- Betrachtet wird eine in einem Intervall I differenzierbare Funktion f.
- Die erste Ableitung beschreibt die Steigung des Graphen einer Funktion.
- **Monotoniekriterium**
  $f'(x) > 0$ im Intervall $I \Rightarrow f$ ist streng monoton zunehmend in I
  $f'(x) < 0$ im Intervall $I \Rightarrow f$ ist streng monoton abnehmend in I



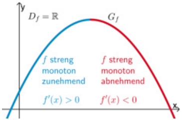


Umkehrbarkeit einer Funktion

- Die Umkehrbarkeit einer Funktion lässt sich mit dem **Monotoniekriterium** untersuchen.
- Eine Funktion heißt umkehrbar, falls es zu jedem Werte der Wertemenge genau einen Wert der Definitionsmenge gibt.
- Ist eine Funktion auf ihrem Definitionsbereich bzw. einem Teilbereich davon **streng monoton zunehmend oder streng monoton abnehmend**, ist sie dort **umkehrbar**.



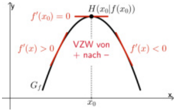
umkehrbar im Definitionsbereich



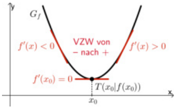
umkehrbar in Teilbereichen

Extremstellen, Extremwerte, Extrempunkte

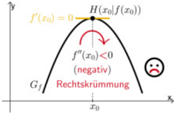
- Betrachtet wird eine in einem Intervall I ein- bzw. zweimal differenzierbare Funktion f.
- An einer Extremstelle hat eine Funktion ein **Maximum** oder ein **Minimum**.
- Eine Extremstelle einer Funktion ist eine **Nullstelle der ersten Ableitung** der Funktion.
- An einer Extremstelle hat der Funktionsgraph eine **waagrechte Tangente**.
- Notwendige Bedingung: $f'(x_0) = 0$
  - Vorzeichenwechsel (VZW) von f'
  - Vorzeichen von f''



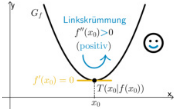
lokales Maximum, Hochpunkt



lokales Minimum, Tiefpunkt



lokales Maximum, Hochpunkt



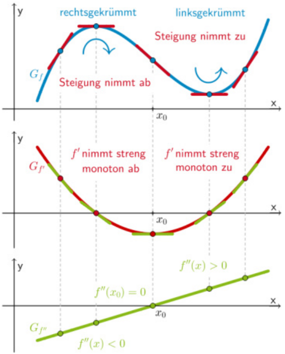
lokales Minimum, Tiefpunkt

Krümmungsverhalten

Betrachtet wird eine in einem Intervall I zweimal differenzierbare Funktion f.

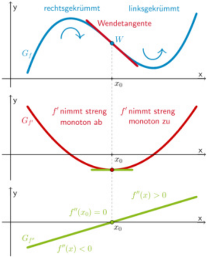
rechtsgekrümmt, Steigung des Graphen nimmt ab (1. Ableitung), Änderungsrate der Steigung (2. Ableitung) ist negativ

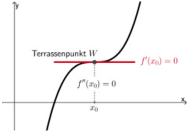
linksgekrümmt, Steigung des Graphen nimmt zu (1. Ableitung), Änderungsrate der Steigung (2. Ableitung) ist positiv



Wendestellen, Wendepunkte, Wendetangente

- Betrachtet wird eine in einem Intervall I zweimal differenzierbare Funktion f.
- An einer Wendestelle **ändert der Graph sein Krümmungsverhalten**.
- Der zugehörige Graphenpunkt heißt **Wendepunkt** W.
- Die Tangente an den Graphen im Wendepunkt heißt Wendetangente.
- Im Wendepunkt ist die **Steigung** des Graphen einer Funktion **lokal extremal**.
- Eine Wendestelle einer Funktion ist eine **Extremstelle der ersten Ableitung** der Funktion und somit eine **Nullstelle der zweiten Ableitung** der Funktion.
- Notwendige Bedingung: $f''(x_0) = 0$
  - Vorzeichenwechsel (VZW) von f''
  - Mithilfe der dritten Ableitung f'''
    - $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$ ist **Wendestelle**
    - $f'''(x_0) = 0$: **keine Aussage** bezüglich Wendestelle **möglich**.
- Gilt an einer Wendestelle zusätzlich $f'(x_0) = 0$:
  - $W(x_0|f(x_0))$ ist **Terrassenpunkt**
  - waagrechte Wendetangente



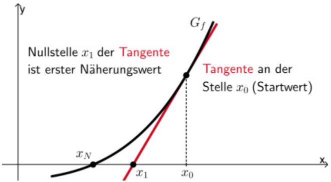


Newton-Verfahren

- Näherungsweise Bestimmung von Nullstellen
- Newton'sche Iterationsformel

  $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)};\ n \in \mathbb{N}\ \ (f'(x_n) \neq 0)$$

- geeigneter Startwert x_0
  - liegt in der Umgebung der zu bestimmenden Nullstelle x_N
  - darf keine Extremstelle sein, da $f'(x_0) \neq 0$



Funktionsbestimmungen

- Die Aufgabenstellung nennt den **Ansatz für den** zu bestimmenden **Funktionsterm**, z.B. „ganzrationale Funktion vom Grad 3".
- Die Aufgabenstellung nennt **Eigenschaften des Funktionsgraphen** wie z.B. Graphenpunkte, Extrempunkte, Steigung des Graphen an einer Stelle usw.
- Aus den Eigenschaften lassen sich mithilfe des Funktionsansatzes und dessen Ableitung(en) **Gleichungen formulieren**.
- Die Gleichungen ergeben ein **zu lösendes Gleichungssystem**.

Eigenschaft(en)	Gleichung(en)		
Der Graph der Funktion f	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
• schneidet die x-Achse an der Stelle x_0 (Nullstelle).	$f(x_0)=0$		
• berührt die x-Achse an der Stelle x_0.	$f(x_0)=0$	$f'(x_0)=0$	
• schneidet die y-Achse an der Stelle y_0.	$f(0)=y_0$		
• verläuft durch den Punkt $P(x_0 \mid y_0)$	$f(x_0)=y_0$		
• hat einen Hochpunkt/Tiefpunkt an der Stelle x_0.		$f'(x_0)=0$	
• hat an der Stelle x_0 die Steigung m.		$f'(x_0)=m$	
• hat einen Wendepunkt an der Stelle x_0.			$f''(x_0)=0$
• hat an der Stelle x_0 die größte Steigung/das größte Gefälle.			$f''(x_0)=0$
• hat den Wendepunkt $W(x_0 \mid y_0)$.	$f(x_0)=y_0$		$f''(x_0)=0$
• hat den Terrassenpunkt $P(x_0 \mid y_0)$	$f(x_0)=y_0$	$f'(x_0)=0$	$f''(x_0)=0$
• berührt den Graphen der Funktion g an der Stelle x_0.	$f(x_0)=g(x_0)$	$f'(x_0)=g'(x_0)$	
• Die Tangente im Punkt $P(x_0 \mid y_0)$ hat die Steigung m.	$f(x_0)=y_0$	$f'(x_0)=m$	
• Die Tangente im Wendepunkt $W(x_0 \mid y_0)$ hat die Steigung m.	$f(x_0)=y_0$	$f'(x_0)=m$	$f''(x_0)=0$