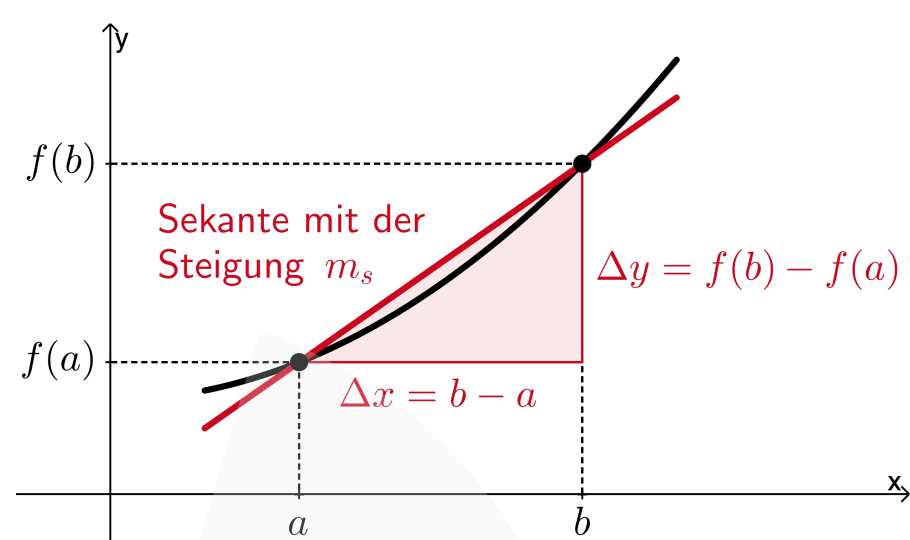


Differentialrechnung

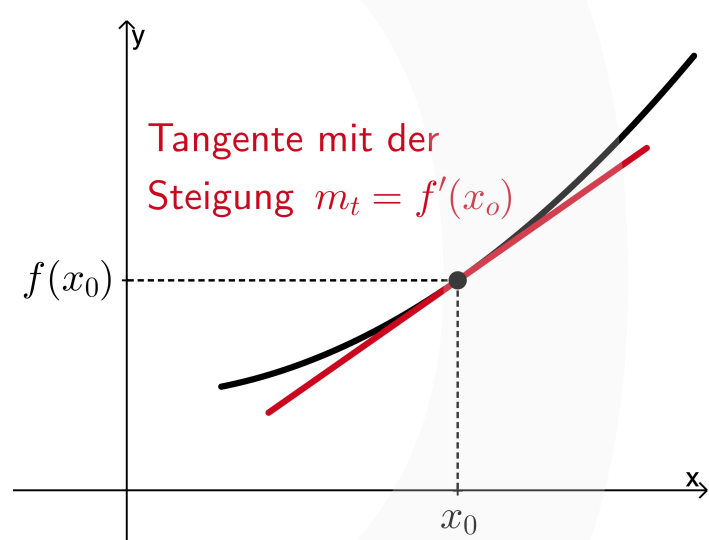
Differenzenquotient

- $m_s = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
- Steigung einer Sekante durch zwei Graphenpunkte $(a|f(a))$ und $(b|f(b))$
- Mittlere Änderungsrate einer Funktion im Intervall $[a; b]$



Differentialquotient

- $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- Formale Definition der Ableitung einer Funktion
- Steigung der Tangente an den Graphen einer Funktion an einer Stelle x_0
- Steigung des Graphen einer Funktion an einer Stelle x_0
- Lokale Änderungsrate einer Funktion an einer Stelle x_0
- Im Sachzusammenhang: Momentane Änderungsrate einer Größe zu einem Zeitpunkt t



Ableitungen / Ableitungsregeln

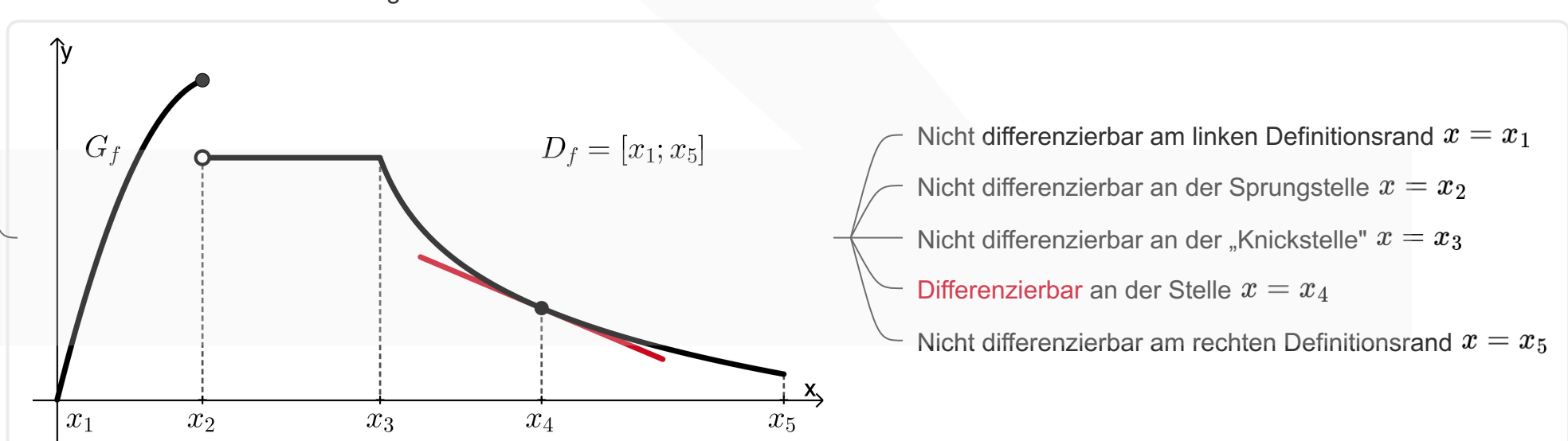
	Term der Funktion	Term der Ableitungsfunktion
Konstante Funktion	c	0
Potenzfunktion	x^r	$r \cdot x^{r-1}$
Wurzelfunktion	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
Sinusfunktion	$\sin x$	$\cos x$
Kosinusfunktion	$\cos x$	$-\sin x$
Natürliche Exponentialfunktion	e^x	e^x
Exponentialfunktion	a^x	$a^x \cdot \ln a$
Natürliche Logarithmusfunktion	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
Logarithmusfunktion	$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$

	Term der Funktion	Term der Ableitungsfunktion
Summenregel	$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
Faktorregel	$k \cdot u(x)$	$k \cdot u'(x)$
Produktregel	$u(x) \cdot v(x)$	$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
Quotientenregel	$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$
Kettenregel	$u(v(x))$	$u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Differenzierbarkeit

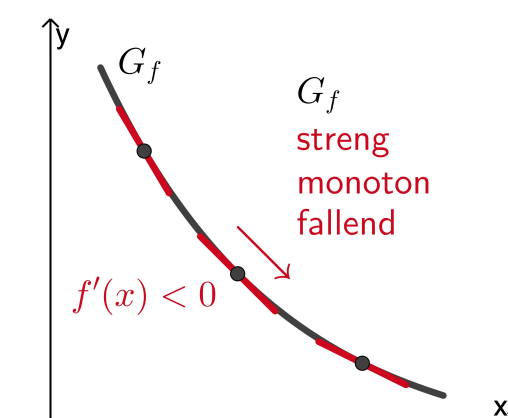
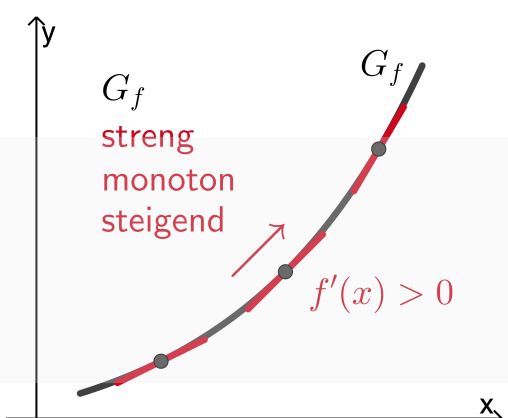
- Differenzierbar, wenn der Differentialquotient existiert, d. h. wenn der links- und der rechtsseitige Grenzwert übereinstimmen.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Nicht differenzierbar an einer „Knick“- oder Sprungstelle
Nicht differenzierbar an den eingeschlossenen Rändern eines Definitionsbereichs



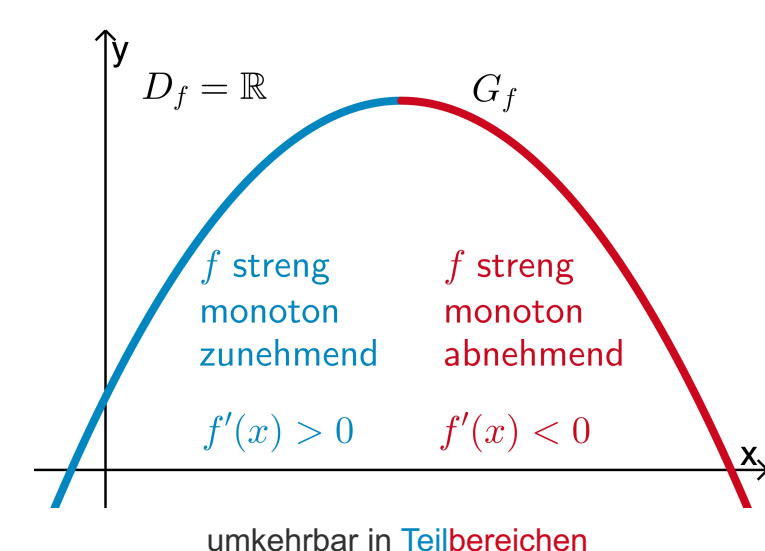
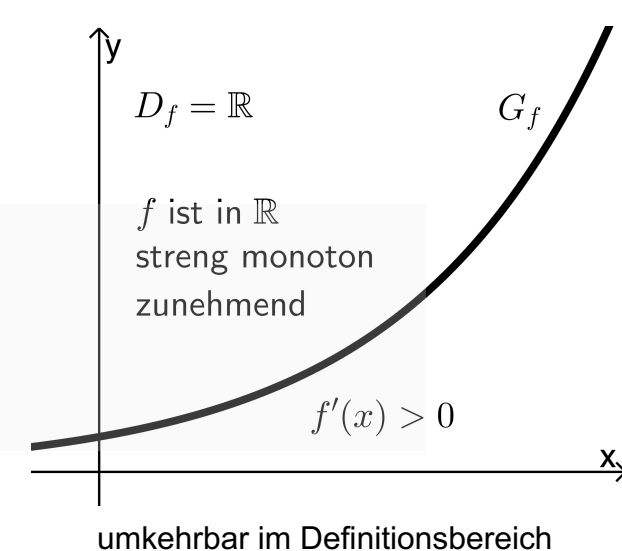
Monotonieverhalten

- Betrachtet wird eine in einem Intervall I differenzierbare Funktion f .
- Die erste Ableitung beschreibt die Steigung des Graphen einer Funktion.
- Monotoniekriterium
- $f'(x) > 0$ im Intervall $I \Rightarrow f$ ist streng monoton zunehmend in I
- $f'(x) < 0$ im Intervall $I \Rightarrow f$ ist streng monoton abnehmend in I



Umkehrbarkeit einer Funktion

- Die Umkehrbarkeit einer Funktion lässt sich mit dem Monotoniekriterium untersuchen.
- Eine Funktion heißt umkehrbar, falls es zu jedem Werte der Wertemenge genau einen Wert der Definitionsmenge gibt.
- Ist eine Funktion auf ihrem Definitionsbereich bzw. einem Teilbereich davon streng monoton zunehmend oder streng monoton abnehmend, ist sie dort umkehrbar.



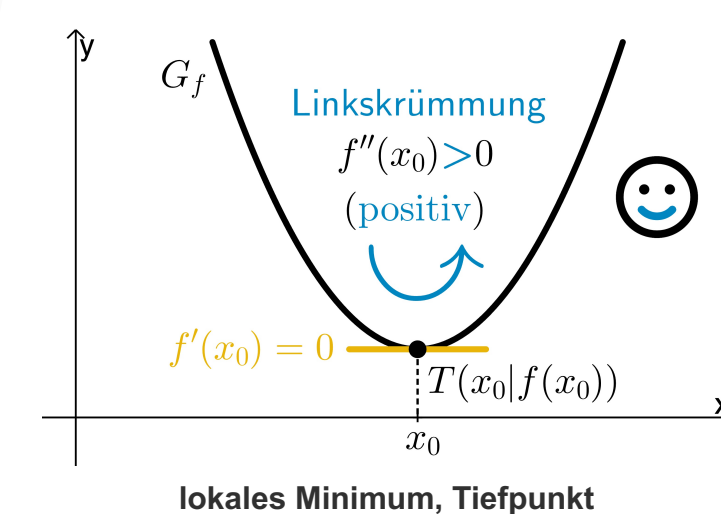
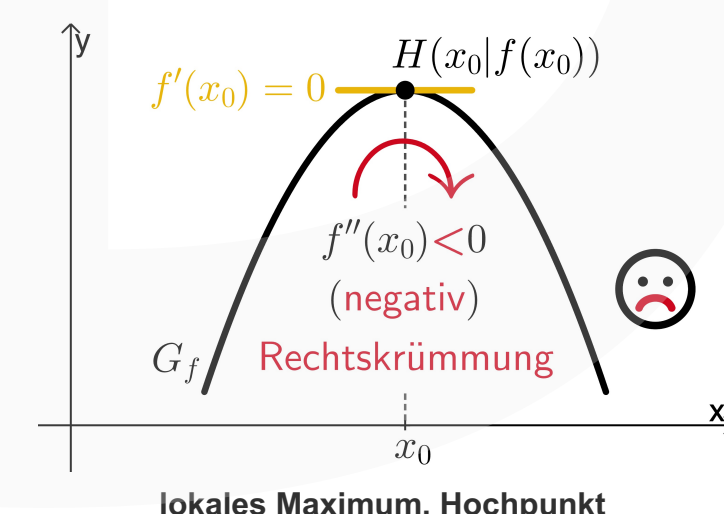
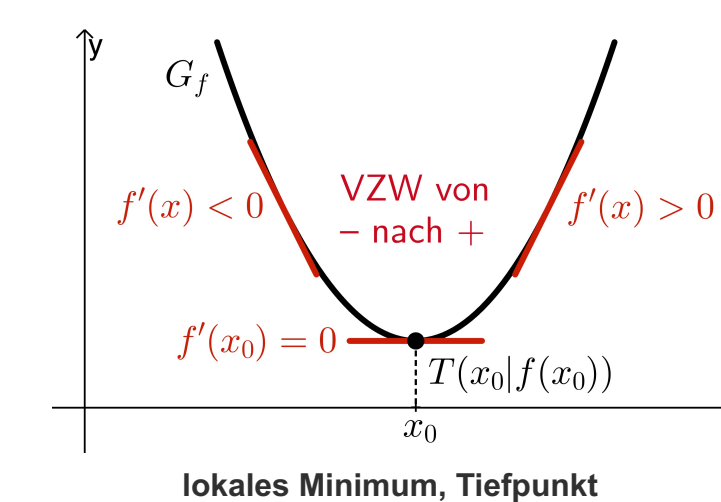
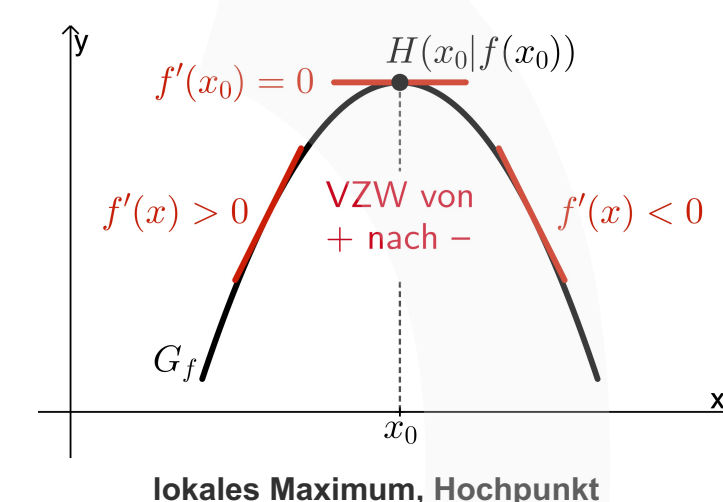
Extremstellen, Extremwerte, Extrempunkte

- Betrachtet wird eine in einem Intervall I ein- bzw. zweimal differenzierbare Funktion f .
- An einer Extremstelle hat eine Funktion ein Maximum oder ein Minimum.
- Eine Extremstelle einer Funktion ist eine Nullstelle der ersten Ableitung der Funktion.
- An einer Extremstelle hat der Funktionsgraph eine waagrechte Tangente.

Notwendige Bedingung: $f'(x_0) = 0$

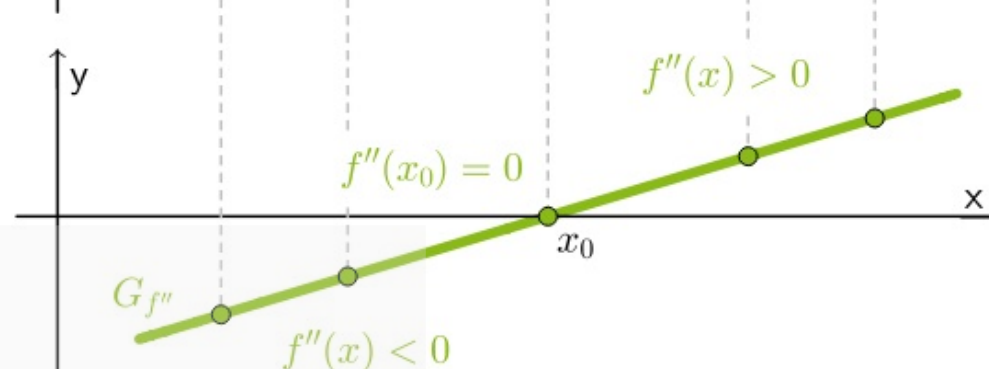
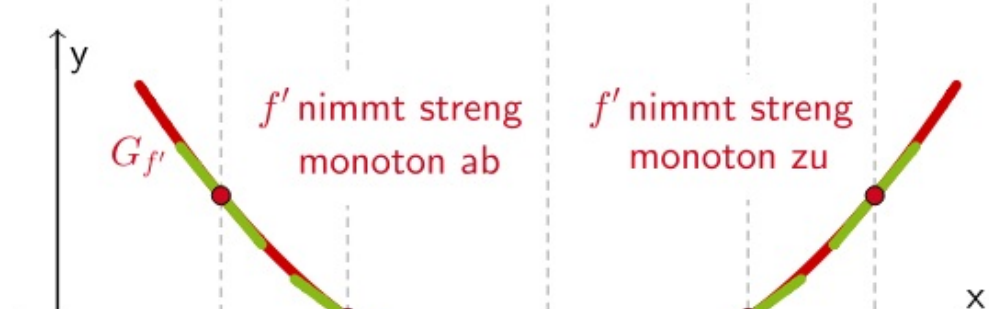
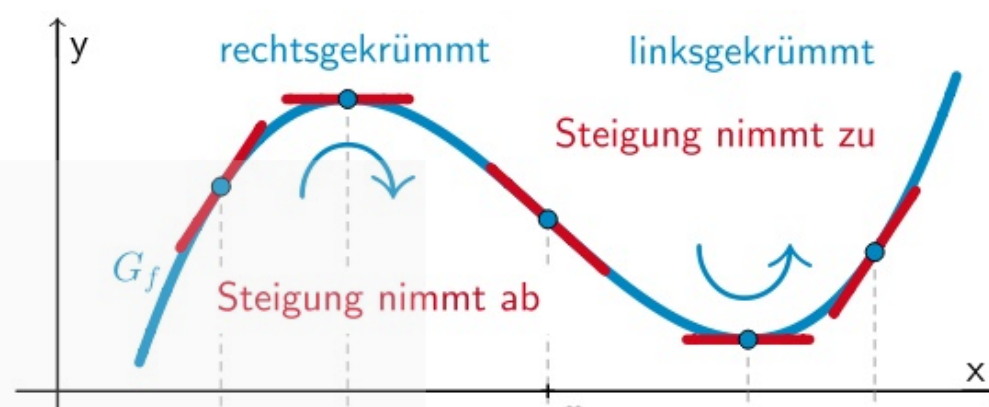
Vorzeichenwechsel (VZW) von f'

Vorzeichen von f''



Krümmungsverhalten

- Betrachtet wird eine in einem Intervall I zweimal differenzierbare Funktion f .
- rechtsgekrümmt, Steigung des Graphen nimmt ab (1. Ableitung), Änderungsrate der Steigung (2. Ableitung) ist negativ
- linksgekrümmt, Steigung des Graphen nimmt zu (1. Ableitung), Änderungsrate der Steigung (2. Ableitung) ist positiv



Wendestellen, Wendepunkte, Wendetangente

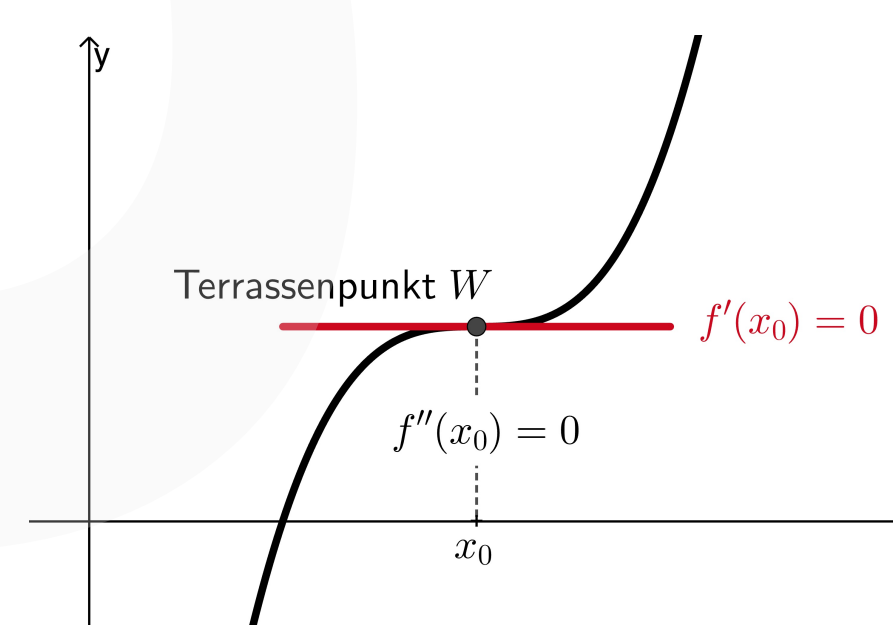
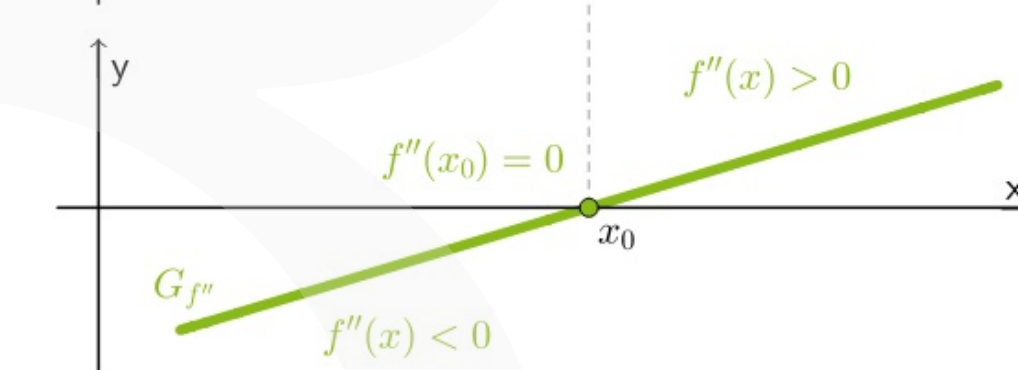
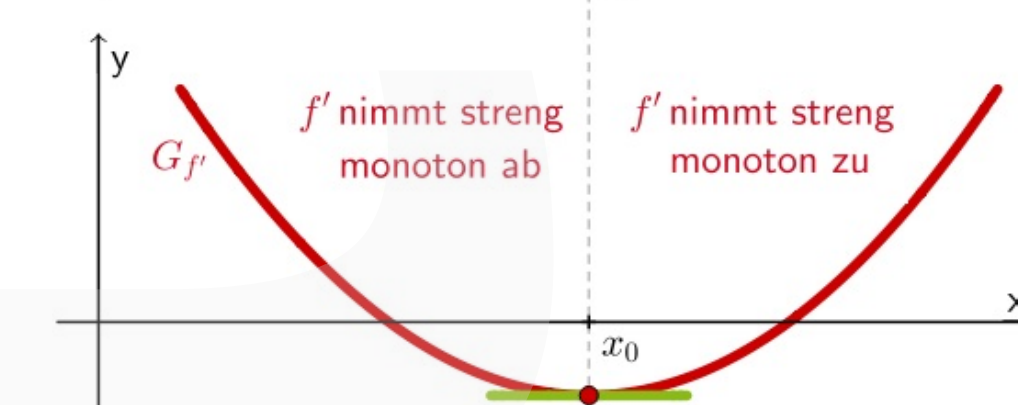
- Betrachtet wird eine in einem Intervall I zweimal differenzierbare Funktion f .
- An einer Wendestelle ändert der Graph sein Krümmungsverhalten.
- Der zugehörige Graphenpunkt heißt Wendepunkt W .
- Die Tangente an den Graphen im Wendepunkt heißt Wendetangente.
- Im Wendepunkt ist die Steigung des Graphen einer Funktion lokal extremal.
- Eine Wendestelle einer Funktion ist eine Extremstelle der ersten Ableitung der Funktion und somit eine Nullstelle der zweiten Ableitung der Funktion.

Notwendige Bedingung: $f''(x_0) = 0$

Vorzeichenwechsel (VZW) von f''

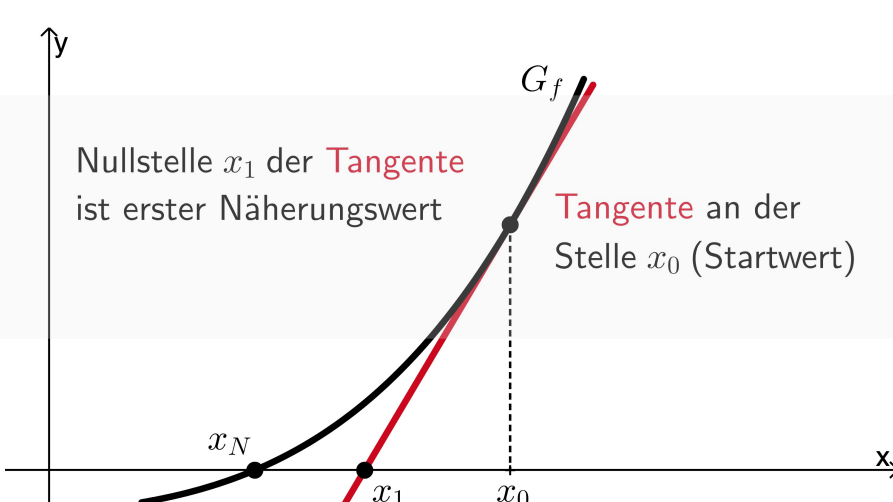
Mithilfe der dritten Ableitung f'''

- $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$ ist Wendestelle
- $f'''(x_0) = 0$: keine Aussage bezüglich Wendestelle möglich.



Newton-Verfahren

- Näherungsweise Bestimmung von Nullstellen
- Newton'sche Iterationsformel
- $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$; $n \in \mathbb{N}$ ($f'(x_n) \neq 0$)



- günstiger Startwert x_0 liegt in der Umgebung der zu bestimmenden Nullstelle x_N darf keine Extremstelle sein, da $f'(x_0) \neq 0$

Funktionsbestimmungen

- Die Aufgabenstellung nennt den Ansatz für den zu bestimmenden Funktionsterm, z.B. „ganzrationale Funktion vom Grad 3“.
- Die Aufgabenstellung nennt Eigenschaften des Funktionsgraphen wie z.B. Graphenpunkte, Extrempunkte, Steigung des Graphen an einer Stelle usw.
- Aus den Eigenschaften lassen sich mithilfe des Funktionsansatzes und dessen Ableitung(en) Gleichungen formulieren.
- Die Gleichungen ergeben ein zu lösendes Gleichungssystem.

Eigenschaft(en)	Gleichung(en)
Der Graph der Funktion f	$f(x)$ $f'(x)$ $f''(x)$
• schneidet die x-Achse an der Stelle x_0 (Nullstelle).	$f(x_0) = 0$
• berührt die x-Achse an der Stelle x_0	$f(x_0) = 0$ $f'(x_0) = 0$
• schneidet die y-Achse an der Stelle y_0 .	$f(0) = y_0$
• verläuft durch den Punkt $P(x_0 y_0)$	$f(x_0) = y_0$
• hat einen Hochpunkt/Tiefpunkt an der Stelle x_0 .	$f'(x_0) = 0$
• hat an der Stelle x_0 die Steigung m .	$f'(x_0) = m$
• hat einen Wendepunkt an der Stelle x_0 .	$f''(x_0) = 0$
• hat an der Stelle x_0 die größte Steigung/das größte Gefälle.	$f''(x_0) = 0$
• hat den Wendepunkt $W(x_0 y_0)$.	$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) = 0$
• hat den Terrassenpunkt $P(x_0 y_0)$	$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) = 0$
• berührt den Graphen der Funktion g an der Stelle x_0 .	$f(x_0) = g(x_0)$ $f'(x_0) = g'(x_0)$
• Die Tangente im Punkt $P(x_0 y_0)$ hat die Steigung m .	$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = m$
• Die Tangente im Wendepunkt $W(x_0 y_0)$ hat die Steigung m .	$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = m$ $f''(x_0) = 0$