Gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

Aufgaben mit Lösungen

Definition

- Gebrochenrational, wenn darstellbar als Quotient zweier Polynome: $x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}$
- Zählerpolynom $p(x) \neq 0$
- Nennerpolynom $q(x)$ **mindestens vom Grad 1**
- a_m, b_n heißen Leitkoeffizienten

Darstellungsformen

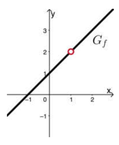
- $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \xrightarrow[\Longleftrightarrow]{\text{Polynomdivision}} g(x) + r(x)$ **mit** $\lim\limits_{x \to \pm\infty} r(x) = 0$
  - Gegeben in der Form $g(x) + r(x)$
  - Polynomdivision wird nicht erwartet
- Konstanter oder linearer Term $g(x)$
- Gebrochenrationaler Term (Rest) $r(x)$
- Günstig für Grenzwertbetrachtungen $x \to -\infty$ **bzw.** $x \to +\infty$
- Günstiger Ansatz für Funktionsbestimmungen, wenn
  - waagrechte oder schräge Asymptote bekannt
  - Polstelle(n) bekannt
- Beispiele
  - $f(x) = \frac{4(2x-1)}{4x-3} \Leftrightarrow 2 + \frac{2}{4x-3}$
    - $g(x) = 2$
    - $r(x) = \frac{2}{4x-3}$
    - $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(2 + \underbrace{\frac{2}{4x-3}}_{\to 0}\right) = 2$
  - $h(x) = \frac{-x^2+3x+2}{x-2} \Leftrightarrow -x + 1 + \frac{4}{x-2}$
    - $g(x) = -x + 1$
    - $r(x) = \frac{4}{x-2}$
    - $\lim\limits_{x \to \pm\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(-x + 1 + \underbrace{\frac{4}{x-2}}_{\to 0}\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (-x+1) = \pm\infty$

Nullstelle(n)

- Nullstelle(n) des Zählerpolynoms $p(x)$
- Beispiel: $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1} \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$
- Ausnahme: Nullstelle des Zählerpolynoms ist zugleich Nullstelle des Nennerpolynoms und daher kürzbar (vgl. hebbare Definitionslücke).
- Beispiel: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$

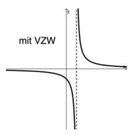
Definitionslücke(n)

- Nullstelle(n) des Nennerpolynoms $q(x)$
- Maximaler Definitionsbereich: $D = \mathbb{R} \backslash \{\text{„Nennernullstellen"}\}$
- Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \backslash \{-1; 1\}$
- **Hebbare Definitionslücke**
  - **Vollständig kürzbare** Nullstelle des Nennerpolynoms $q(x)$
  - Graph besitzt dort ein Definitionsloch
  - Hebbar durch Zusatzdefinition
  - Beispiel
    - $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$
    - hebbare Definitionslücke $x = 1$
    - Graph zeigt ein Definitionsloch an der Stelle $x = 1$
    - Grenzwertbetrachtung am gekürzten Term: $\lim\limits_{x \to 1} (x+1) = 2$
    - Hebbar durch Zusatzdefinition: $g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für } x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \\ 2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$

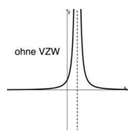


Polstelle(n)

- **Nicht vollständig kürzbare** Nullstelle(n) des Nennerpolynoms $q(x)$
- Beispiele
  - $f(x) = \frac{1}{x-1} \Rightarrow$ Polstelle $x = 1$
  - $f(x) = \frac{x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow$ Polstelle $x = 1$
  - Aber: $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1} \Rightarrow$ hebbare Definitionslücke $x = 1$
- **Mit Vorzeichenwechsel (VZW)**
  - Einfache, dreifache, ... Nennernullstelle
  - Der Graph verläuft links- und rechtsseitig der Polstelle entgegengesetzt nach Unendlich
  - Beispiele
    - $f(x) = \frac{1}{x-1}$
    - $g(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$
    - Polstelle mit VZW $x = 1$

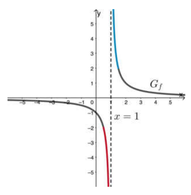


- **Ohne Vorzeichenwechsel**
  - doppelte, vierfache, ... Nennernullstelle
  - Der Graph verläuft links- und rechtsseitig der Polstelle gleichermaßen nach Unendlich
  - Beispiele
    - $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$
    - $g(x) = \frac{1}{(x-1)^4}$
    - Polstelle ohne VZW $x = 1$

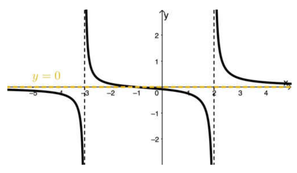


Asymptoten

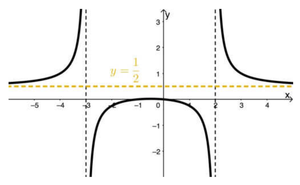
- **Senkrechte Asymptote**
  - an einer Polstelle $x = x_0$
  - mit der Gleichung $x = x_0$
  - Untersuchung: Links- bzw. rechtsseitige Grenzwertbetrachtung für $x \to x_0$
  - Beispiel
    - $f(x) = \frac{1}{x-1}$
    - Polstelle mit VZW $x = 1$
    - Senrechte Asymptote mit der Gleichung $x = 1$
    - Linksseitige Grenzwertbetrachtung: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{1}{\underbrace{x-1}_{\to 0^-}} = -\infty$
    - Rechtsseitige Grenzwertbetrachtung: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{1}{\underbrace{x-1}_{\to 0^+}} = +\infty$
    - mit VZW



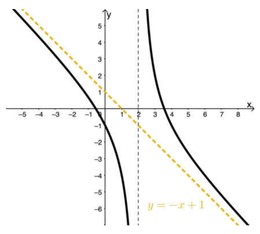
- **Waagrechte / Schräge Asymptote**
  - Beschreibt das Verhalten des Graphen für $x \to -\infty$ **bzw.** $x \to +\infty$
  - Untersuchung / Nachweis
    - Vergleich von Zählergrad z des Zählerpolynoms und Nennergrad n des Nennerpolynoms
    - Grenzwertbetrachtung für $x \to -\infty$ **bzw.** $x \to +\infty$
  - **Tipp**: Für eine aussagekräftige Grenzwertbetrachtung ist es hilfreich, die höchste Potenz des Nenners im Zähler **und** im Nenner auszuklammern (und zu kürzen).
  - **z < n**
    - Funktion **konvergiert** (Grenzwert existiert) gegen 0
    - Graph hat eine **waagrechte Asymptote** mit der Gleichung $\boldsymbol{y = 0}$ (x-Achse)
    - Beispiel
      - $f(x) = \frac{2x^1+2}{4x^2+4x-24} \Rightarrow \mathbf{z} = 1 < 2 = \mathbf{n}$
      - Grenzwertbetrachtung: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x+2}{4x^2+4x-24} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(4 + \frac{4}{x} - \frac{24}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\overset{\to 0}{\frac{2}{x}} + \overset{\to 0}{\frac{2}{x^2}}}{4 + \underset{\to 0}{\frac{4}{x}} - \underset{\to 0}{\frac{24}{x^2}}} = \frac{0}{4} = 0$
      - Schlussfolgerung: Waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 0$



  - **z = n**
    - Funktion **konvergiert** (Grenzwert existiert) gegen einen konstanten Wert $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
    - **waagrechte Asymptote** mit der Gleichung $\boldsymbol{y = c}$ **mit** $\boldsymbol{c = \frac{a^m}{b^n}}$ **(Quotient der Leitkoeffizienten)**
    - Beispiel
      - $f(x) = \frac{2x^2+2x}{4x^2+4x-24} \Rightarrow \mathbf{z} = 2 = 2 = \mathbf{n}$
      - Quotient der Leitkoeffizienten: $f(x) = \frac{2x^2+2x}{4x^2+4x-24} \Rightarrow c = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
      - Grenzwertbetrachtung
        - $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2+2x}{4x^2+4x-24} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2\left(2 + \frac{2}{x}\right)}{x^2\left(4 + \frac{4}{x} - \frac{24}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2 + \overset{\to 0}{\frac{2}{x}}}{4 + \underset{\to 0}{\frac{4}{x}} - \underset{\to 0}{\frac{24}{x^2}}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
        - $f(x) = \frac{2x^2+2x}{4x^2+4x-24} \xrightarrow[\text{Hauptnenner}]{\text{Polynomdivision}} \frac{1}{2} + \frac{12}{4x^2+4x-24} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{12}{4x^2+4x-24}}_{\to 0}\right) = \frac{1}{2}$
      - Schlussfolgerung: Waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}$

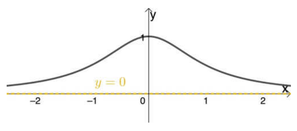


  - **z > n mit z = n + 1**
    - Funktion **divergiert** (Grenzwert existiert nicht) nach $-\infty$ **bzw.** $+\infty$
    - **schräge Asymptote** mit der Gleichung $\boldsymbol{y = mx + t}$
    - Beispiel
      - $f(x) = \frac{-x^2+3x+2}{x^1-2} \Rightarrow \mathbf{z} = 2 > 1 = \mathbf{n}$ **mit** $\mathbf{z} = 2 = 1 + 1 = \mathbf{n} + 1$
      - Grenzwertbetrachtung: $f(x) = \frac{-x^2+3x+2}{x^1-2} \xrightarrow[\text{Hauptnenner}]{\text{Polynomdivision}} -x + 1 + \frac{4}{x-2} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(-x + 1 + \underbrace{\frac{4}{x-2}}_{\to 0}\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (-x+1) = \pm\infty$
      - Schlussfolgerung: Schräge Asymptote mit der Gleichung $y = -x + 1$

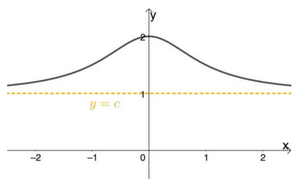


Funktionsbestimmungen

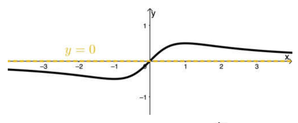
- $D = \mathbb{R}$: $\frac{1}{\underbrace{x^2+1}_{>0}}$
  - keine Nullstelle: $\frac{1}{x^2+1}$
    - waagrechte Asyptote
      - x-Achse $(y = 0)$: $\frac{1}{x^2+1}$
        - symmetrisch bezüglich der y-Achse: $\frac{1}{x^2+1}$



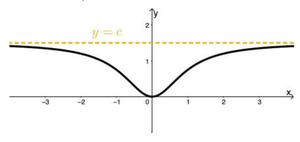
        - symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs: ✗
      - $y = c$: $c + \frac{1}{x^2+1}$ $(c > 0)$
        - symmetrisch bezüglich der y-Achse: $c + \frac{1}{x^2+1}$



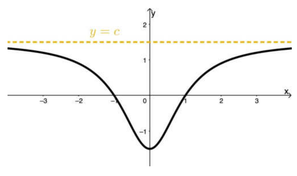
        - symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs: ✗
    - schräge Asymptote: ✗
  - Nullstelle $x = x_1$: $\frac{x - x_1}{x^2+1}$
    - waagrechte Asymptote
      - x-Achse $(y = 0)$: $\frac{x - x_1}{x^2+1}$
        - symmetrisch bezüglich der y-Achse: ✗
        - symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs, wenn Nullstelle $x_1 = 0$: $\frac{x}{x^2+1}$



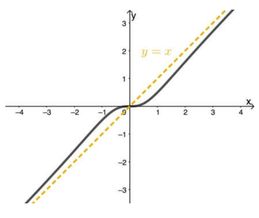
      - $y = c$, **wenn z = n**: $\frac{a(x-x_1)^2}{b(x^2+1)}$ **mit** $c = \frac{a}{b}$ $(a, b \neq 0)$
        - symmetrisch bezüglich der y-Achse
          - $x_1 = 0$: $\frac{ax^2}{b(x^2+1)}$



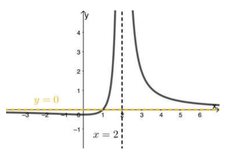
          - zweite Nullsttelle $x = -x_1$: $\frac{a(x-x_1)(x+x_1)}{b(x^2+1)} = \frac{a(x^2-x_1^2)}{b(x^2+1)}$



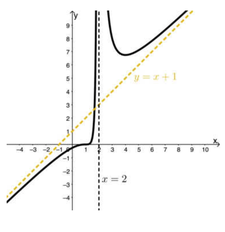
        - symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs: ✗
    - schräge Asymptote
      - Gleichung beliebig: $\frac{(x-x_1)^3}{x^2+1}$ $(\mathbf{z} = \mathbf{n} + 1)$
        - symmetrisch bzgl. der y-Achse: ✗
        - symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs, wenn z.B. $x_1 = 0$: $\frac{x^3}{x^2+1}$



      - $y = mx + t$ vorgegeben
      - Vorgaben bedingen sich gegenseitig
- Polstelle $x = x_0$
  - mit VZW
  - ohne VZW
    - keine Nullstelle: $\frac{1}{(x-x_0)^2}$



    - Nullstelle $x = x_1$ $(x_1 \neq x_0)$: $\frac{x - x_1}{(x-x_0)^2}$
      - waagrechte Asymptote
        - x-Achse $(y = 0)$: $\frac{x - x_1}{(x-x_0)^2}$ $(\mathbf{z} < \mathbf{n})$ — keine Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems
        - $y = c$ $(c \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ vorgegeben
      - schräge Asymptote
        - Gleichung beliebig: $\frac{(x-x_1)^3}{(x-x_0)^2}$ $(\mathbf{z} = \mathbf{n}+1)$



        - $y = mx + t$ vorgegeben
      - Vorgaben bedingen sich gegenseitig
      - Vorgaben bedingen sich gegenseitig